



UPPSALA
UNIVERSITET

Träd

Joakim Nivre

Uppsala universitet
Institutionen för lingvistik och filologi



UPPSALA
UNIVERSITET

Översikt

Träd:

- Sammanhängande grafer utan cykler
- Spännande träd

Olika typer av träd:

- Rotade träd och sökning
- Ordnade träd och traversering
- Riktade träd
- Märkta träd



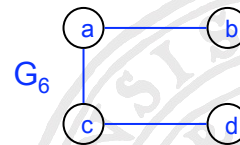
Träd

Definition:

- En (oriktad) graf är ett **träd** om den är
 - sammanhängande,
 - acyklisk.

Exempel:

- $G_6 = (V_1, E_6)$
 - $V_1 = \{a, b, c, d\}$
 - $E_6 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$



Observera:

- I ett träd finns exakt en stig mellan varje nodpar.
- För ett träd $G = (V, E)$ gäller att $|V| = |E| + 1$.
- Noder med grad 1 kallas **löv**.

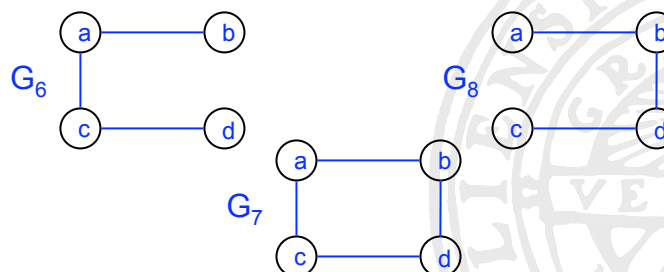
3



Spännande träd

Definition:

- Ett **spännande träd** för en sammanhängande graf $G = (V, E)$ är en delgraf $G' = (V', E')$ till G sådan att $V = V'$ och G' är ett träd.
- **Exempel:** G_6 och G_8 är spännande träd för G_7 .



4



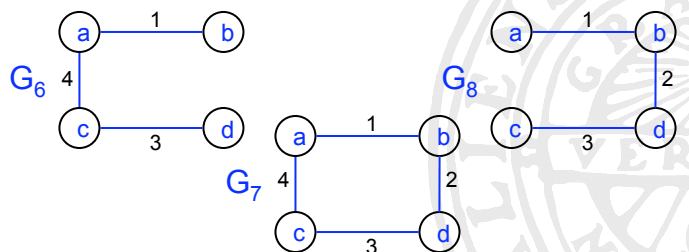
Minimala spännande träd

Graf med viktade bågar:

- Varje båge är märkt med ett tal (vikt)
- Modellerar t.ex. kostnad, avstånd, sannolikhet

Minimalt spännande träd:

- Spännande träd med minsta viktsumma
- Exempel: G_8 är minimalt spännande träd för G_7 .



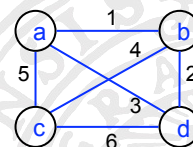
Algoritmer för spännande träd

Ta bort bågar med hög vikt:

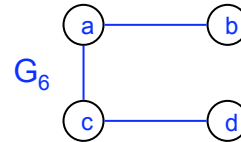
- Börja med $G = (V, E)$
- Upprepa:
 - Ta bort den båge med högst som inte gör grafen osammanhängande

Lägg till bågar med hög vikt:

- Börja med $G' = (V, \emptyset)$
- Upprepa:
 - Lägg till den båge med lägst vikt som inte ger upphov till en cykel

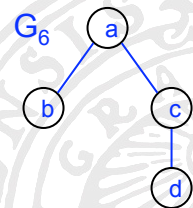


Rotade träd



Definition:

- Ett **rotat** träd är ett träd där en unik nod kallas **rot**.
- Observera:
 - Rotade träd ritas vanligen med roten överst.
 - Nya termer för grannar:
 - **Förälder** (närmast roten)
 - **Barn** (längst från roten)
 - Exempel:
 - Noden **a** är **rot**.
 - Noden **a** är **förälder** till **b** och **c**.
 - Noden **d** är **barn** till **c**.
 - Noden **a** är **förfader** till de övriga.
 - Noden **d** är **ättling** till **a**.

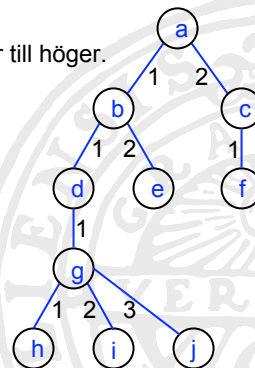


7

Ordnade träd

Definition:

- Ett **ordnat** träd är ett rotat träd där en nods barn kommer i en bestämd ordning.
- Observera:
 - Barnen ritas normalt från vänster till höger.
 - Exempel:
 - Noden **a** är **rot**.
 - Noden **b** är **a**:s första barn.
 - Noden **c** är **a**:s andra barn.
 - ...
 - Noden **h** är **g**:s första barn.
 - Noden **i** är **g**:s andra barn.
 - Noden **j** är **g**:s tredje barn.



8



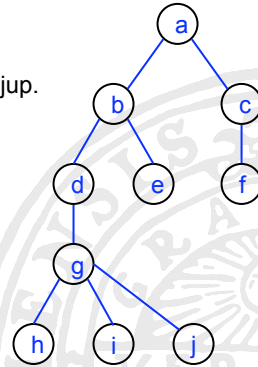
Sökning i ordnade träd

Bredden först (vänster-höger):

- Starta i roten.
- Upprepa:
 - Besök alla noder på samma djup.
 - Gå vidare till nästa nivå.
- Exempel:
 - a-b-c-d-e-f-g-h-i-j

Djupet först (vänster-höger):

- Starta i roten.
- Besök barn före syskon.
- Exempel:
 - a-b-d-g-h-i-j-e-c-f



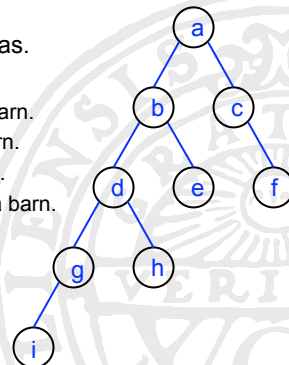
9



Binära träd

Definition:

- Ett **binärt** träd är ett rotat träd där varje nod har högst två barn, ett till **vänster** och ett till **höger**.
- Observera:
 - Ett barn (eller båda) kan saknas.
 - Exempel:
 - Noderna a, b och d har två barn.
 - Noden c har inget vänsterbarn.
 - Noden g har inget högerbarn.
 - Noderna e, f, h och i har inga barn.



10



Traversering av binära träd

Preorder:

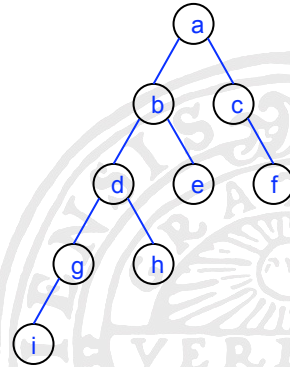
- Rot \rightarrow V delträd \rightarrow H delträd
- Exempel: a-b-d-g-i-h-e-c-f

Postorder:

- Vänster \rightarrow H delträd \rightarrow Rot
- Exempel: i-g-h-d-e-b-f-c-a

Inorder:

- V delträd \rightarrow Rot \rightarrow H delträd
- Exempel: i-g-d-h-b-e-a-c-f



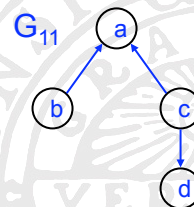
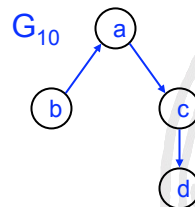
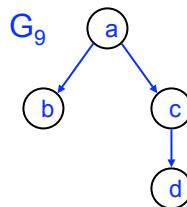
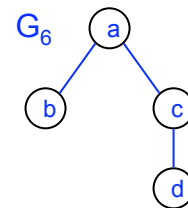
11



Riktade träd

Definition:

- Ett **riktat** träd är en riktad graf som skulle vara ett träd om den var oriktad.
- Exempel: G_9 , G_{10} och G_{11} är alla riktade träd (jfr G_6).



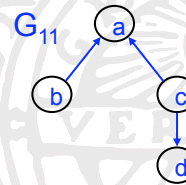
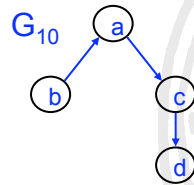
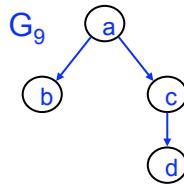
12



Speciella riktade träd

Vanligt villkor på riktat träd (**arborescens**):

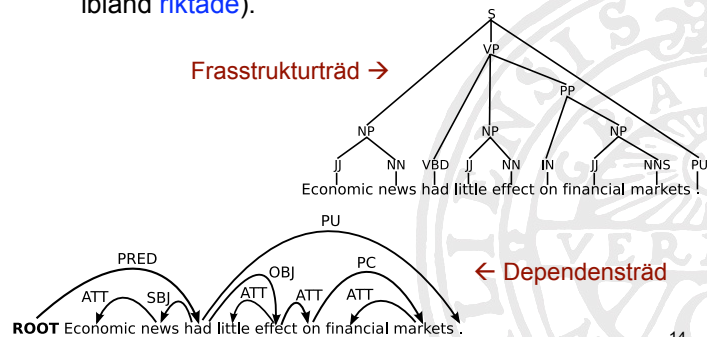
- Alla bågar pekar bort från roten.
- Konsekvenser:
 - Alla noder utom roten har ingrad 1.
 - Det finns en stig från roten till varje annan nod.
- Exempel:
 - Endast G_9 uppfyller villkoret.



Märkta träd

Märkta noder och bågar:

- I många tillämpningar är det praktiskt att sätta etiketter på noder och/eller bågar.
- Märkta träd är normalt **rotade** (ofta **ordnade** och ibland **riktade**).





Övningar (Eriksson & Gavel)

Sektion 6.5:

- Övning 6.55, 6.56, 6.58–6.59, 6.62, 6.67, 6.72

Lingvistiska träd:

- Betrakta följande meningar:
 - *Grafteori är ofattbart kul.*
 - *Vem har du hört det av?*
- Konstruera frasstrukturträd för meningarna.
Räkna upp alla noder och bågar.
- Konstruera dependensträd för meningarna.
Räkna upp alla noder och bågar.