



UPPSALA
UNIVERSITET

Relationer och funktioner

Joakim Nivre

Uppsala universitet
Institutionen för lingvistik och filologi



UPPSALA
UNIVERSITET

Översikt

Relationer:

- Binära relationer på mängder
- Mängd-, graf- och matrisnotation
- Egenskaper hos relationer
- Ekvivalensrelationer och partialordningar

Funktioner:

- Funktion som ett specialfall av relation
- Egenskaper hos funktioner
- Inversfunktioner

Relationer

Begreppet relation:

- En **relation** är något som råder (eller inte råder) mellan två eller flera objekt.
- Exempel:
 - **a** är mor till **b**
 - **a** är större än eller lika med **b**
 - **a** befinner sig mellan **b** och **c**

Binära relationer på mängder:

- Låt **A** vara en mängd och **R** en relation som kan råda mellan parvisa element i **A**.
- Notation: **aRb** = **a** har relationen **R** till **b**
- Extensionen för **R** i **A** = $R(A) = \{ (a, b) \in A \times B \mid aRb \}$

3

Mängder, grafer, matriser

Relation:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- **R** = "kommer före i alfabetet"

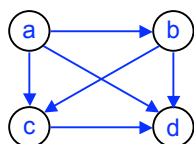
R som en mängd (extension):

- $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

R som en matris

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	0	1	1
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0

R som en riktad graf



4



Egenskaper hos relationer

Reflexivitet:

- En relation R på mängden A är
 - **reflexiv** omm aRa (för alla $a \in A$)
 - **irreflexiv** omm $\neg aRa$ (för alla $a \in A$)
- Vilka relationer är reflexiva/irreflexiva?
 - "släkt med", "delmängd till", "identisk med", "skild från"

Symmetri:

- En relation R på mängden A är
 - **symmetrisk** omm aRb implicerar bRa för alla $a, b \in A$
 - **asymmetrisk** omm aRb implicerar $\neg bRa$ för alla $a, b \in A$
- Vilka relationer är symmetriska/asymmetriska?
 - "släkt med", "delmängd till", "identisk med", "skild från"

5



Fler egenskaper hos relationer

Antisymmetri:

- En relation R på mängden A är **antisymmetrisk** omm aRb och bRa implicerar $a = b$ för alla $a \in A$.
- Vilka av följande relationer är antisymmetriska?
 - "släkt med", "delmängd till", "identisk med", "skild från"

Transitivitet:

- En relation R på mängden A är
 - **transitiv** omm aRb och bRc implicerar aRc för alla $a, b, c \in A$
 - **intransitiv** omm aRb och bRc implicerar $\neg aRc$ för alla $a, b, c \in A$
- Vilka av följande relationer är transitiva/intransitiva?
 - "släkt med", "delmängd till", "identisk med", "skild från"

6



Ekvivalensrelationer

Definition:

- En **ekvivalensrelation** R på A är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
- R delar A i delmängder för vilka aRb gäller för alla par av element – ekvivalensklasser.

Exempel:

- Låt A vara potensmängden till $\{a, b, c\}$.
- Låt R vara "har samma kardinalitet som".
- Vilka är ekvivalensklasserna?

7



Partialordningar

Definition:

- En **partialordning** R på A är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.
- R ordnar elementen i A partiellt:
 - aRb utesluter bRa (om $a \neq b$),
 - varken aRb eller bRa behöver råda.

Exempel:

- Låt A vara potensmängden till $\{a, b, c\}$.
- Låt R vara delmängdsrelationen.
- Hur ser ordningen ut?

8

Relationer mellan mängder

Definition:

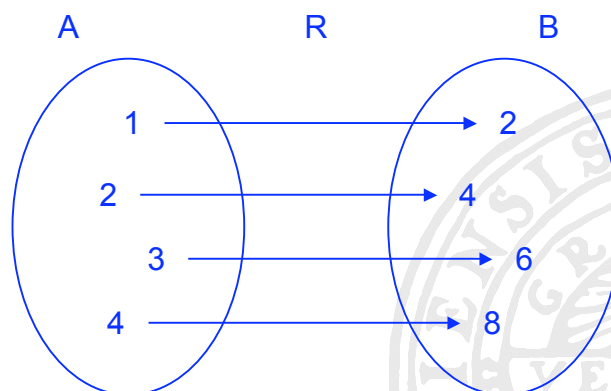
- En relation mellan mängd A och B är en delmängd av produkten $A \times B$.
- Exempel:
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $B = \{2, 4, 6, 8\}$
 - $R = \{ (a, b) \in A \times B \mid a \text{ är hälften av } b \}$
 - $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

Observera:

- En relation på mängden A kan förstås som en relation från A till A .
- Reflexivitet, (anti)symmetri och transitivitet är inte meningsfulla för relationer mellan mängder.

9

Relationsdiagram



10

Funktioner

Funktion:

- En funktion f från A till B är en regel som tilldelar varje element i A ett element i B .
- Notation: $f(a) = b$ ($a \in A, b \in B$)
- A är funktionens domän, B dess kodomän.
- Notation: $f : A \rightarrow B$

Exempel:

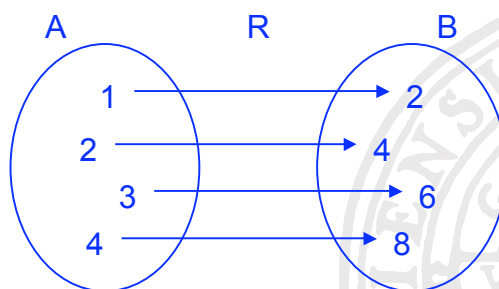
- Personnummer i Sverige
- Vilken är funktionens domän? Kodomän?

11

Funktioner som relationer

En funktion är en binär relation:

- $f : A \rightarrow B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$



12

Egenskaper hos funktioner

Injektion:

- En funktion $f : A \rightarrow B$ är **injektiv** omm $f(a)$ är unik för varje $a \in A$.
- Exempel: Personnummer i Sverige.

Surjektion:

- En funktion $f : A \rightarrow B$ är **surjektiv** omm det för varje $b \in B$ finns något $a \in A$ sådant att $f(a) = b$.
- Exempel: $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

Bijektion:

- En funktion $f : A \rightarrow B$ är **bijektiv** omm f är injektiv och surjektiv.
- Exempel: $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

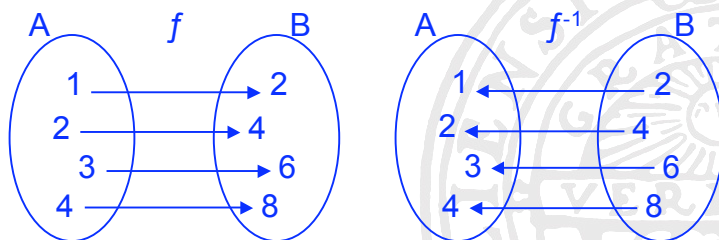
13

Inverser

Observera:

- Om $f : A \rightarrow B$ är en bijektion, så finns det en funktion $f^{-1} : B \rightarrow A$ sådan att $f^{-1}(b) = a$ omm $f(a) = b$.
- Funktionen f^{-1} kallas inversen till f och noteras f^{-1} .

Exempel:



14

Övningar (Eriksson & Gavel)

Sektion 8.1:

- [Övning 8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.16, 8.20, 8.21, 8.25](#)

Sektion 8.2:

- [Övning 8.30, 8.37, 8.40, 8.47](#)

Läsanvisningar:

- [Hoppa över 8.1.3, 8.2.1, 8.2.3](#)
- [Hoppa över exempel med "avancerad matematik"](#)