UPPSALA
UNIVERSITET

Matematisk notation

Joakim Nivre

Uppsala universitet
Institutionen för lingvistik och filologi

UPPSALA
UNIVERSITET

Översikt

Definitioner:
- Nödvändiga och tillräckliga villkor
- Rekursiva definitioner

Kompakt notation:
- Summaberäkning
- Produktberäkning
- Mängdoperationer

2

UPPSALA UNIVERSITET

Definitioner

Två delar:

- Definiendum = det som definieras
- Definiens = det som definierar

Exempel:

A är en delmängd till B ← definiendum

om och endast om

varje element i A är element i B ← definiens

3

UPPSALA UNIVERSITET

Nödvändiga och tillräckliga villkor

Tillräckligt villkor:

- A är en delmängd till B om A = B

Nödvändigt villkor:

- A är en delmängd till B endast om |A| ≤ |B|

Definiens:

- Både nödvändigt och tillräckligt (om och endast om)

4

UPPSALA
UNIVERSITET

Exempel

Vad säger ni om följande definitioner?

- Mängdprodukt:
  - A x B innehåller alla möjliga par (a, b) sådana att $a \in A$ och $b \in B$.
- Kvadrat:
  - En kvadrat är en rektangel där alla fyra sidor är lika långa.
- Kunskap:
  - X vet p omm X tror p och p är sant.

5

UPPSALA
UNIVERSITET

Rekursiva definitioner

Rekursiva definitioner:

- Definitioner som refererar till sig själva

Basfall:

- Definierar enkla fall (ofta uppräkning)
  - Exempel: a, b, c, …, z är reguljära uttryck.

Rekursion:

- Definierar komplexa fall (ofta oändlig mängd)
  - Exempel: Om A och B är reguljära uttryck, så är AB, A|B och A* också reguljära uttryck.

6

UPPSALA UNIVERSITET

Cirkeldefinitioner?

Jämför:

- Om A är ett reguljärt uttryck, så är A ett reguljärt uttryck.

Observera:

- Rekursiva definitioner ger ofta bara tillräckliga villkor.
- Nödvändiga villkor ges av tilläggssats:
  - I mängden av reguljära uttryck ingår endast uttryck som ges av de föregående satserna.

7

UPPSALA UNIVERSITET

Naturliga tal

Basfall:

- 0 är ett naturligt tal.

Rekursion:

- Om n är ett naturligt tal, så är $s(n)$ [efterföljaren till n] ett naturligt tal.

Mängden av naturliga tal:

- $N = \{ 0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots \}$
- $N = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$

8

UPPSALA UNIVERSITET

Addition av naturliga tal

Basfall:

- $0 + n = n$ [för alla n]

Rekursion:

- Om $m > 0$, så $m + n = ((m - 1) + n) + 1$

Exempel:

- $3 + 2 = (2 + 2) + 1$
- $2 + 2 = (1 + 2) + 1$
- $1 + 2 = (0 + 2) + 1 = 3$
- $2 + 2 = 3 + 1 = 4$
- $3 + 2 = 4 + 1 = 5$

9

UPPSALA UNIVERSITET

Summaberäkningar

Exempel:

- Summera de 10 första naturliga talen
- Summera $n - 1$ för $n = 1$ till 4

Explicit uppräkning:

- $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
- $(1 - 1) + (2 - 1) + (3 - 1) + (4 - 1) = 6$

Förkortad uppräkning:

- $0 + \ldots + 9 = 45$
- $(1 - 1) + \ldots + (4 - 1) = 6$

10

UPPSALA UNIVERSITET

Abstraktion till godtycklig längd

För godtyckliga *m*:

- Summera de naturliga talen t.o.m. *m*

Förkortad uppräkning:

- $0 + \ldots + m$

Abstraktion över oändligt många serier:

- 0 [$m = 0$]
- $0 + 1$ [$m = 1$]
- $0 + 1 + 2$ [$m = 2$]
- $0 + 1 + 2 + 3$ [$m = 3$]
- $0 + 1 + 2 + 3 + 4$ [$m = 4$]

11

UPPSALA UNIVERSITET

Summasymbolen

Kompakt notation:

$$\sum_{i=0}^{m} i = 0 + 1 + \ldots + m$$

Mer generellt:

Övre gräns (*n*)

$$\sum_{i=k}^{n} f_i$$

Summaterm (funktion av *i*)

Summationsindex (*i*)

Undre gräns (*k*)

12

UPPSALA UNIVERSITET

Exempel

Kvadratsumma:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + \ldots + n^2$$

Mängdsumma:

- Givet en mängd $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + \ldots + a_k$$

13

UPPSALA UNIVERSITET

Generaliseringar

Mängdsumma igen:

$$\sum_{a \in A} a = a_1 + \ldots + a_k$$

Andra logiska och matematiska villkor:

$$\sum_{B \subseteq A} |B|$$

14

UPPSALA UNIVERSITET

Produktsymbolen

Multiplikation av de *m* första positiva talen:

$$\prod_{i=1}^{m} i = 1 \cdot \ldots \cdot m$$

Mera generellt:

$$\prod_{i=k}^{n} f_i$$

Övre gräns (*n*)

Faktor (funktion av *i*)

Produktindex (*i*)

Undre gräns (*k*)

15

UPPSALA UNIVERSITET

Exempel

Bråkprodukt:

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{m}$$

Produkt av mängdelement:

- Givet en mängd $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$

$$\prod_{i=1}^{k} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_k$$

16

UPPSALA UNIVERSITET

Mängdoperationer

Kompakt notation kan även användas för mängdoperationer:

- Union:

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_k$$

- Snitt:

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_k$$

17

UPPSALA UNIVERSITET

Exempel

Hur skriver man följande kompakt:

- 1 • 2 • 3 • 4
- 2 + 4 + 6 + 8 + 10
- 1 • (1 + 2) • (1 + 2 + 3) • (1 + 2 + 3 + 4)

Hur läser man ut följande:

$$\sum_{i=1}^{5} 3i - 1$$

$$\prod_{i=2}^{5} i + (i-1)$$

18

UPPSALA UNIVERSITET

Övningar (Eriksson & Gavel)

Sektion 4.1:

- Övning 4.9–4.10, 4.12, 4.16