



UPPSALA
UNIVERSITET

Mängder

Joakim Nivre

Uppsala universitet
Institutionen för lingvistik och filologi



UPPSALA
UNIVERSITET

Översikt

Grundbegrepp:

- Mängder och element
- Delmängder

Operationer på mängder:

- Union och snitt
- Differens och komplement

Mer om mängder:

- Mängders storlek (kardinalitet)
- Mängder av mängder (potensmängder)

Ordnade mängder:

- Mängdprodukt
- Par



UPPSALA
UNIVERSITET

Mängder och element

Definition:

- En **mängd** är en uppsättning objekt.
- Objekten sägs vara **element** i mängden.

Tre sätt att beskriva mängder:

- Uppräkning:
 - $A = \{\text{Danmark, Finland, Island, Norge, Sverige}\}$
- Beskrivning:
 - $A = \{x \mid x \text{ är ett nordiskt land}\}$
- Venn-diagram:



3



UPPSALA
UNIVERSITET

Elementrelationen

Notation:

- $a \in A$ – a är element i (mängden) A
- $a \notin A$ – a är **inte** element i (mängden) A

Observera:

- En mängds identitet bestäms endast av vilka element som ingår i mängden.
- Beskrivningen spelar ingen roll:
 - $\{x \mid x \text{ är president i USA}\} = \{x \mid x \text{ är överbefälhavare i USA}\}$
- Ordningen vid uppräkning spelar ingen roll:
 - $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$
- Varje element räknas bara en gång:
 - $\{1, 1, 1, 1\} = \{1\}$

4



UPPSALA
UNIVERSITET

Delmängder

Definition:

- A är en **delmängd** till B om och endast om (omm) varje element i A är element i B .
 - Notation: $A \subseteq B$.
- A är en **äkta delmängd** till B omm A är en delmängd till B men inte vice versa.
 - Notation: $A \subset B$

Exempel:

- $A = \{ x \mid x \text{ är ett nordiskt land} \}$
- $B = \{ x \mid x \text{ är ett europeiskt land} \}$
- Då gäller $A \subseteq B$. Varför?
- Gäller också $A \subset B$?
- Och hur är det med $A \subseteq A$?

5



UPPSALA
UNIVERSITET

Speciella mängder

Definition:

- Den tomma mängden är mängden utan element och betecknas \emptyset eller $\{\}$.
- Universalmängden är mängden av alla tillgängliga objekt och betecknas (bland annat) U .

Observera:

- Den tomma mängden har många beskrivningar:
 - $\{ x \mid x \text{ är en måne till Merkurius} \}$
 - $\{ x \mid x \text{ är en kvinnlig ärkebiskop i Sverige} \}$
 - $\{ x \mid x \text{ är ett positivt tal mindre än noll} \}$
- För alla mängder A gäller att $\emptyset \subseteq A$.
 - Varför?

6



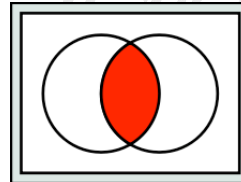
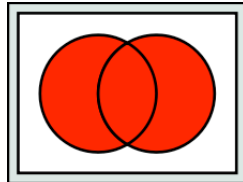
UPPSALA
UNIVERSITET

Union och snitt

Definitioner:

- **Unionen** av A och B är mängden av objekt som är element i A eller B (eller båda).
 - Notation: $A \cup B$
- **Snittet** av A och B är mängden av objekt som är element i **både A och B** .
 - Notation: $A \cap B$

Venn-diagram:



7



UPPSALA
UNIVERSITET

Union och snitt – exempel

Antag:

- $A = \{ x \mid x \text{ är student på STP} \}$
- $B = \{ x \mid x \text{ går kursen 5LN445} \}$
- $C = \{ x \mid x \text{ bor i Uppsala} \}$

Då gäller (rimligen):

- $A \cup B = A$ och $A \cap B = B$
 - Varför?
- $(B \cap C) \subseteq B \subseteq (B \cup C)$

8



UPPSALA
UNIVERSITET

Fler begrepp

Definitioner:

- **Differensen** mellan A och B är mängden av objekt som är element i A men **inte** i B .
 - Notation: $A \setminus B$ (eller $A - B$)
- **Komplementet** till A är mängden av objekt som **inte** är element i A (givet en viss universalmängd).
 - Notation: A^c
- A och B är **disjunkta** om de inte har några gemensamma element.
 - Notation: $A \cap B = \emptyset$

Observera:

- Om $A \cap B = \emptyset$, så gäller $A \setminus B = A$.
- $\emptyset^c = U$ och $U^c = \emptyset$

9



UPPSALA
UNIVERSITET

Fler exempel

Antag:

- U = Mängden av svenska ordformer
- $N = \{ x \mid x \text{ är en form av ett substantiv} \}$
- $V = \{ x \mid x \text{ är en form av ett verb} \}$

Beskriv följande mängder:

- $N \cap V$
- $N \setminus V$
- $(N \setminus V)^c$
- $N^c \setminus V$

Fundera på:

- I vilka mängder ingår "rör" respektive "hör"?

10



UPPSALA
UNIVERSITET

Räkneregler (union och snitt)

Associativitet:

- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Kommutativitet:

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

Distributivitet:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Idempotens:

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

11



UPPSALA
UNIVERSITET

Om mängders storlek

Definition:

- En mängds storlek kallas **kardinalitet**.
- Kardinaliteten för A betecknas $|A|$.
- För **ändliga** mängder är kardinaliteten lika med **antalet element**.

Exempel:

- $\{a, b, c\} = 3$
- $\{x \mid x \text{ är invånare i Sverige}\} \approx 9 \text{ miljoner}$
- $\{x \mid x \text{ är ett svenskt ord}\} = ?$

Fundera på:

- Gäller det att $|A \cup B| = |A| + |B|$?

12



UPPSALA
UNIVERSITET

Delmängder av delmängder

Delmängdsrelationen är **transitiv**:

- Om $A \subseteq B$ och $B \subseteq C$, så $A \subseteq C$.
- Exempel:
 - $A = \{\text{Lisa, Pelle}\}$
 - $B = \{\text{Lisa, Pelle, Stina}\}$
 - $C = \{\text{Lisa, Pelle, Stina, Olle}\}$

Potensmängd:

- Mängden av alla delmängder till A kallas **potensmängden** till A och betecknas $P(A)$.
- Exempel:
 - $A = \{\text{krona, klave}\}$
 - $P(A) = \{\emptyset, \{\text{krona}\}, \{\text{klave}\}, \{\text{krona, klave}\}\}$

13



UPPSALA
UNIVERSITET

Ordnade par

Par:

- Ett par (a, b) är en mängd av två element, där a är första och b andra element.

Observera:

- $(a, b) \neq (b, a)$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$

Exempel:

- Vi kan representera personnamn, bestående av förnamn och efternamn som ordnade par:
 - $(\text{"Joakim"}, \text{"Nivre"})$
 - $(\text{"Mattias"}, \text{"Nilsson"})$

14



UPPSALA
UNIVERSITET

Mängdprodukt

Parbildning:

- Produkten av mängderna A och B är mängden av alla par där första elementet är från A och andra elementet från B .
- $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$

Exempel:

- $A = \{ \text{"Joakim"}, \text{"Mattias"} \}$
- $B = \{ \text{"Nilsson"}, \text{"Nivre"} \}$
- $A \times B = \{ (\text{"Joakim"}, \text{"Nilsson"}), (\text{"Joakim"}, \text{"Nivre"}), (\text{"Mattias"}, \text{"Nilsson"}), (\text{"Mattias"}, \text{"Nivre"}) \}$

15



UPPSALA
UNIVERSITET

N-tupler

Generalisering av parbegreppet:

- En n -tupel (a_1, \dots, a_n) är en ordnad mängd med första element a_1 och n :e element a_n .

Generalisering av mängdprodukt:

- $A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}$

Exempel:

- Mängden av femordsyttranden
- $A = \{ a \mid a \text{ är ett ord} \}$
- $A \times A \times A \times A \times A = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \mid a_1 \in A, a_2 \in A, a_3 \in A, a_4 \in A, a_5 \in A \}$

16



UPPSALA
UNIVERSITET

Övningar (Eriksson & Gavel)

Sektion 2.1:

- Övning 2.2, 2.4, 2.5, 2.6–2.8

Sektion 2.2:

- Övning 2.9–2.11, 2.15

Sektion 2.4:

- Övning 2.17, 2.23, 2.25

Sektion 2.5:

- Övning 2.28

