



UPPSALA
UNIVERSITET

Grafer

Joakim Nivre

Uppsala universitet
Institutionen för lingvistik och filologi



UPPSALA
UNIVERSITET

Översikt

Grundbegrepp:

- Noder (hörn) och bågar (kanter)

Grafteoretiska begrepp:

- Stigar och cykler
- Delgrafer och sammanhängande grafer
- Riktade och oriktade grafer
- Multigrafier

Representation av grafer:

- Grannmatriser
- Incidensmatriser



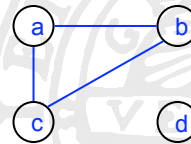
Noder, bågar och grafer

Definition:

- En graf $G = (V, E)$ består av:
 - En mängd V av **noder** (hörn)
 - En mängd E av **bågar** (kanter)
- En båge $\{a, b\}$ förbinder två noder a och b , som sägs vara **grannar**.

Exempel:

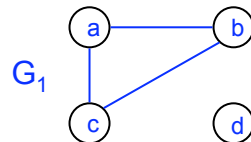
- $G_1 = (V_1, E_1)$
 - $V_1 = \{a, b, c, d\}$
 - $E_1 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$



3



Grad, stig, cykel



Grad:

- En nods **grad** är antalet bågar den ingår i.
 - **Exempel:** I G_1 har noderna a , b och c graden **2**, medan noden d har graden **0**.

Stig:

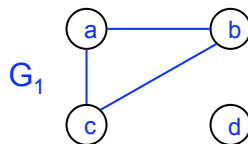
- En **stig** är en väg som följer bågar och inte passerar samma nod eller båge två gånger.
 - **Exempel:** I G_1 är $a-b-c$ en stig (men inte $a-b-d$ eller $a-b-a-c$).

Cykel:

- En **cykel** är en stig med samma start- och slutpunkt.
 - **Exempel:** I G_1 är $a-b-c-a$ en cykel (men inte $a-b-a$ eller $a-b-c$).

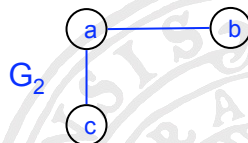
4

Delgrafer



Delgraf:

- En graf $G = (V, E)$ är en **delgraf** till grafen $G' = (V', E')$ omm $V \subseteq V'$ och $E \subseteq E'$.
 - **Exempel:** En delgraf till G_1 är $G_2 = (V_2, E_2)$ där:
 - $V_2 = \{a, b, c\}$
 - $E_2 = \{(a, b), (a, c)\}$
 - Vilka fler delgrafer har G_1 ?
 - Hur många delgrafer har G_1 ?



Sammanhängande graf:

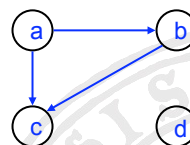
- En graf G är **sammanhängande** omm det finns en stig mellan varje par av noder i G .
 - **Exempel:** G_2 är sammanhängande men inte G_1 . Men G_1 har två sammanhängande komponenter (delgrafer).

5

Riktade grafer

Riktad graf:

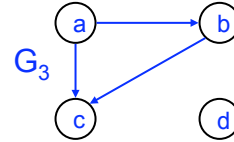
- En **riktad graf** är en graf med "enkelriktade" bågar: $(a, b) \neq (b, a)$.
 - **Exempel:** $G_3 = (V_1, E_3)$
 - $V_1 = \{a, b, c, d\}$
 - $E_3 = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$
- Att fundera på:
 - Hur påverkas noders **grad**?
 - Hur påverkas **stigar** och **cykler**?
 - Hur påverkas begreppet **delgraf**?
 - Hur påverkas begreppet **sammanhängande**?



6



Grad, stig, cykel



Grad:

- **Ingrad** = Antalet inkommande bågar
 - **Exempel:** I G_3 har noderna a och d ingrad 0, b ingrad 1 och c ingrad 2.
- **Utgrad** = Antalet utgående bågar
 - **Exempel:** I G_3 har noderna c och d utgrad 0, b utgrad 1 och a utgrad 2.

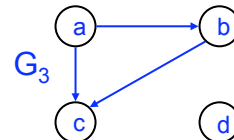
Stig och cykel:

- En **stig** är en väg som följer bågar (i rätt riktning) och inte passerar samma nod eller båge två gånger.
 - **Exempel:** I G_3 är $a-b-c$ en stig (men inte t.ex. $b-c-a$).
- En **cykel** är en stig med samma start- och slutpunkt.
 - **Exempel:** Det finns inga cykler i G_3 (jämför G_1).

7



Delgrafer



Delgraf:

- En riktad graf $G = (V, E)$ är en **delgraf** till den riktade grafen $G' = (V', E')$ omm $V \subseteq V'$ och $E \subseteq E'$.
 - **Exempel:** En delgraf till G_3 är $G_4 = (V_2, E_4)$ där:
 - $V_2 = \{a, b, c\}$
 - $E_4 = \{(a, b), (a, c)\}$

Sammanhängande graf:

- En riktad graf G är **starkt** sammanhängande omm det finns en stig mellan varje par av noder i G .
- En riktad graf G är **svagt** sammanhängande omm motsvarande **oriktade** graf är sammanhängande.
 - **Exempel:** G_3 är varken starkt eller svagt sammanhängande. Har den några sammanhängande delgrafer?

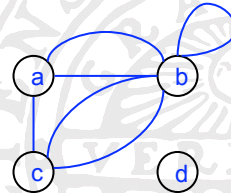
8



Multigrafer

Multigraf:

- En **multigraf** är en graf där det kan finnas mer än en båge mellan två noder **a** och **b**.
- Ibland tillåts även **öglor**, dvs. bågar som förbinder en nod med den själv.
- Att fundera på:
 - Hur definieras bågmängden för en multigraf?
 - Hur definieras öglor?
 - När behövs multigrafer?



9



Riktade multigrafer

Riktad multigraf:

- En **riktad multigraf** är en riktad graf där det kan finnas mer än en båge mellan två noder **a** och **b** (eventuellt också öglor).
- Riktade multigrafer definieras ofta genom att bågarna numreras:
 - Exempel: $G_5 = (V_1, E_5)$
 - $V_1 = \{a, b, c, d\}$
 - $E_5 = \{(a, b, 1), (a, b, 2), (b, c, 1), (a, c, 1), (a, c, 2)\}$
 - Hur ser ut G_5 ? Rita!

10

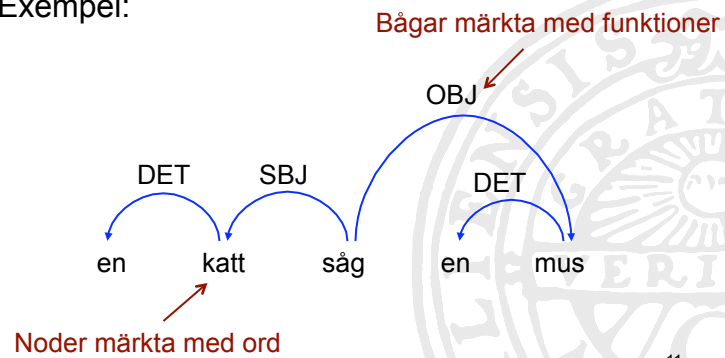


Märkta grafer

Märkta noder och bågar:

- I många tillämpningar är det praktiskt att sätta etiketter på noder och/eller bågar.

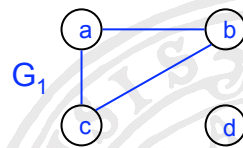
Exempel:



Representation av grafer

Grannmatris:

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	0
d	0	0	0	0

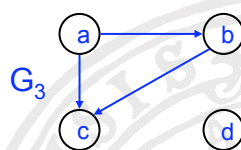


- Cell (x, y) representerar en möjlig båge mellan noderna x och y :
 - 1 = sant = bågen existerar
 - 0 = falskt = bågen existerar inte

Representation av grafer

Grannmatris för riktad graf:

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0



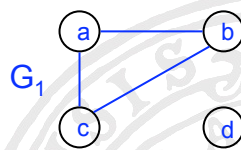
- Grannmatrisen för en riktad graf är inte (nödvändigtvis) symmetrisk

13

Representation av grafer

Incidensmatris:

	{a,b}	{a,c}	{b,c}
a	1	1	0
b	1	0	1
c	0	1	1
d	0	0	0



- Cell $(x, \{y,z\})$ representerar huruvida noden x berörs av bågen $\{y,z\}$.
- Bara existerande bågar representeras (mer ekonomiskt för glesa grafer).

14

Övningar (Eriksson & Gavel)

Sektion 6.1:

- [Övning 6.1, 6.5, 6.11, 6.12, 6.16 \(a och c\)](#)

Sektion 6.4 (ej isomorfi):

- [Övning 6.43, 6.44, 6.47, 6.50](#)

