UPPSALA UNIVERSITET
Institutionen för lingvistik och filologi
Mats Dahllöf

Något om logik och logisk semantik

1 Språk och sanning

Att kunna ett språk innebär att man begriper skillnaden mellan sanna och falska yttranden. Det innebär givetvis mer än så, men skillnaden mellan sanna och falska yttranden är av stor betydelse i alla de sammanhang då språket används för att ge information om hur saker och ting förhåller sig. Talhandlingsteorin lyfter fram vissa aspekter hos kommunikation som går utöver sant och falskt.

1.1 Varför sanning är viktigt

En viktig funktion – men inte den enda förstås – hos språkliga yttranden är att beskriva verkligheten. Med hjälp av språket kan människor på så sätt överföra kunskaper mellan varandra. Detta är av stort värde, eftersom kunskaper ofta är viktiga för att man skall lyckas med olika föresatser. Dessutom är kunskaper ofta är svåra att uppnå och i många fall bygger de på dyrköpta erfarenheter.

Om man t.ex. skall ta sig till en viss plats måste man informera sig om hur man skall ta sig dit. Kanske ber man om en vägbeskrivning; kanske köper man biljetter. Sannolikt är det satser som beskriver vägsträckor inblandade. Dessa måste korrekt beskriva en väg till den plats man vill komma till, annars kommer färdplaneringen antagligen att leda en fel. Om man skall ge sig ut och plocka svamp till en svampstuvning, för att ta ett annat exempel, så måste man ha vissa kunskaper. Man bör då se till att kunnig person berättat för en vilka svampar som är ofarliga och goda eller att man läst på ordentligt i svampböckerna. Annars riskerar man att koka ihop en illasmakande svampstuvning eller en som är så giftig att man skulle ta skada av den. Det skulle vara både riskabelt och tidsödande att själv genom experimenterande bestämma vilka svampar som är ofarliga.

När människor skall koordinera sina handlingar måste de ofta träffa avtal om hur de skall gå tillvägagånga. De måste då vara ense om vad det innebär att uppfylla (göra sanna) satserna i avtalet. Om jag har skrivit att det är en lektion 2009-01-28 kl. 14-16 i sal Eng6/0023, så måste läraren och studenterna förstå och vara ense om vad detta innebär. Detta inkluderar att vara ense om vilken tid och plats som avses, och vilken aktivitet som är planerad. Annars är risken stor att någon part förväntar sig en lektion vid en annan plats och tid, och därmed missar en lektion eller förflyttar sig i onödan.

I juridiska sammanhang står sanningen i centrum. Rättssäkerhet innebär att lagen skall tillämpas utifrån samma kriterier och utifrån vad som verkligen hänt, oberoende av vilken tid, plats och person brottsmisstanken avser. En rättegång handlar i mycket om att utreda vad som är sant i en så objektiv bemärkelse som möjligt. Det är viktigt att bedöma vittnesmåls sanningshalt och se till att olika undersökningar kommer fram till sanningen. Rättssäkerheten bygger alltså på att lagstiftning (och rättspraxis) på ett klart och precist sätt definierar vari ett visst brott består.

Språket tillåter oss alltså att säga *hur det är*, kort sagt. För att tillägna sig ett språk måste man alltså lära sig att i många fall avgöra om ett yttrande korrekt beskriver tillvaron eller inte. Språket måste med medel som kan läras (lexikon och kompositionell semantik) tillåta oss att beskriva otaliga aspekter av tillvaron. De förhållanden vi bör kunna beskriva kan inte bestämmas på förhand. Ett språk måste, p.g.a. dessa omständigheter, vara så flexibelt att både sanna och falska utsagor kan formuleras. (Tillgången på negation gör att det kommer att finnas en sanning per falsk utsaga och vice versa.)

Begreppet ”sanning” har en innebörd som gör att man kan tillämpa det på nya yttranden och på nya språk. Begreppet ”sanning” är baserat på generella principer som torde kunna tillämpas på alla språk. Man kan knappast tänka sig ett språk som inte gör det möjligt att göra sanna och falska yttranden. (Den möjligheten verkar ligga i själva begreppet ”språk”.)

1.2 Sanningsvillkor: vad satser säger

Att veta vad en sats’ betyder är att begripa *hur* tillvaron måste vara beskaffad för att satsen *skall* vara sann. Detta är en central idé inom ”logisk semantik”: En sats’ betydelse är dess sanningsvillkor. Att förstå en sats’ sanningsvillkor är något annat än att veta om dessa villkor är (kommer att bli) uppfyllda eller inte.

Några exempel:

- *En sockerkaka är misslyckad om den innehåller lika mycket salt som socker.*

  Det tar några ögonblick att begripa denna sats sanningsvillkor, och några sekunder ’ till att inse att dessa är uppfyllda.

- *Solen kommer att explodera inom tre miljarder år.*

  Detta handlar om en sak i framtiden som är svår att bedöma, men vi begriper vilken händelseutveckling som måste till för att detta skall vara sant.

- *Fredrik Reinfeldt är född på en torsdag.*

  Du vet antagligen inte om detta är sant eller falskt, men det är ganska lätt att undersöka hur det är med detta.

- *Av dagens riksdagsledamöter är de som är födda på en onsdag fler än de som är födda på en torsdag.*

  Denna utsaga är ganska udda, men den har en klar betydelse. Det skulle innebära en del jobb att undersöka om den är sann.

- *Av dagens riksdagsledamöter kommer de som är födda på en onsdag att uppnå en högre medellivslängd än de som är födda på en torsdag.*

  Även denna utsaga har en klar betydelse. Eftersom den avser framtida förhållanden som inte kan förutsägas, kan vi idag inte undersöka om den är sann.

- *Tryck ut degen i en pajform ca 24 cm i diameter. Ställ in i kylen ca 30 minuter.*

  Dessa imperativa satser från ett recept har som alla imperativa satser mottagaren som implicit subjekt. För att följa den måste man utföra handligar så att satsernas sanningsvillkor uppfylls (relativiserade till en mottagare och en tidpunkt).

1.3 Sanningsvillkor: förstå kontra avgöra om de är uppfyllda

Man kan förstå vad det innebär att en viss sats är sann utan att kunna ta reda på om det är så eller inte. Vardagliga faktasatser av typen *Person P köpte X st CD-skivor 2002* eller *Senast person P var i Örebro var en torsdag* är precisa och enkla att begripa, men kan handla om fakta som helt enkelt blivit bortglömda.

Att veta hur man verifierar eller falsifierar en sats innebär alltså ofta att man vet mer än vad den betyder. Detta är en annan typ av exempel: Om vi tar en ring och säger om den att *denna ring är av 18 karat guld*, då har vi sanningsvillkoren: Satsen är sann om 75 % (18/24) av ringens vikt utgörs av grundämnet guld. (Vi bortser från komplikationen att t.ex. ädelstenar kan ingå i ringen.)

Det här vet man om man är någorlunda allmänbildad, eller så kan man slå upp det i en ordbok (*karat*). Satsen är begriplig för gemene man.

För att verifiera om satsen är sann (att angiven guldhalt föreligger) måste man ha expertkunskaper och tillgång till laboratorieutrustning. Det är ingenting man normalt kan göra hemma.

2 Vad är poängen med logik och logisk semantik?

- Den centrala klassiska frågan inom logiken är hur vi skall skilja **logiskt bindande slutledningar** från andra sätt att resonera.

  I en slutledning utgår vi från satser eller information som är given på förhand, s.k. premisser. Vi drar en slutsats som skall följa ur premisserna. Slutledningen är logiskt bindande om det är omöjligt att slutsatsen är falsk givet att premisserna är det. Logiska slutledningar introducerar inga falska satser givet sanna premisser. (Däremot kan premisserna vara falska i en logisk slutledning.

  Logisk bindande slutledning (premisserna lätta att finna på wikipedia):

  Premiss 1: *Alla däggdjur har tre hörselben i mellanörat.*

  Premiss 2: *Alla marsvin är däggdjur.*

  Slutsats: *Alla marsvin har tre hörselben i mellanörat.*

  (Det var kanske något vi ville veta, men hade svårt att hitta en direkt uppgift om.)

  Slutledning som inte är bindande (premisserna lätta att finna på wikipedia):

  Premiss 1: *En del däggdjur har tänder som växer under hela livet.*

  Premiss 2: *Alla marsvin är däggdjur.*

  Slutsats: *En del marsvin har tänder som växer under hela livet.*

  (Vad är fel på det resonemanget?)

  Logisk slutledning ligger bakom allt resonerande och i stort sett all tillämpning av kunskap på enskilda fall. Ett autentiskt exempel (`www.skatteverket.se`) på information om skatteregler: *Om det är vuxna elever, på t.ex. högskolenivå, som utför arbete, då ses detta normalt som lön för respektive elev och utbetalaren ska både dra skatt och betala socialavgifter.* Om man läser detta så är det sannolikt att man i ett enskilt fall undrar om skatt skall dras på en viss lönesumma för en viss person. Det krävs en hel del logik för att finna svaret utifrån denna generella regel.

Annat illustrerande exempel: Frågan *Gillar du pudlar?* kan få svaret *Jag hatar alla hundar*. Det som gör detta till ett bra svar handlar om ett logiskt resonemang utifrån lexikala principer, främst att alla pudlar är hundar och att man inte gillar sådant som man hatar. Resonemanget blir: *X hatar alla hundar*, alltså *X hatar alla pudlar*, alltså *X gillar inga pudlar*, vilket stämmer direkt med frågan.

- Logiken måste med tanke på ovanstående göra något slags analys av satsers innehåll. Den blir alltså per automatik en typ av semantik för satser. Formell logik av det slag som introduceras här ger oss ett enkelt och systematiskt sätt att analysera satsers innehåll.
- Detta ger oss ett redskap för att klargöra satsers innehåll som kan vara användbart då vi skall klargöra mer komplexa diskursers eller teoriers innehåll.
- Pragmatiska teorier som den om talhandlingar (Austin, Searle) och den om konversationell implikatur (Grice) bygger på att satser har bokstavliga betydelser som kan analyseras med hjälp av logik.
- Även den lexikala semantikens analysbegrepp, t.ex. definitioner och många lexikala relationer, bygger på logisk analys.
- Många tekniska metoder för hantering av information bygger på en formell logisk analys.

3 Satslogik

Satslogiken tillåter oss att fånga vissa synnerligen elementära logiska samband mellan satser. Satslogik är så enkelt och abstrakt att man behöver anstränga sig lite extra för att se poängen.

3.1 Konjunktioner i grammatisk bemärkelse

Satser kan sättas samman till mer komplicerade satser (man kan även säga ”meningar”) med hjälp av olika typer av konjunktioner. Vissa av dessa fångar tidsliga och rumsliga samband, t.ex. *medan*, *innan* och *där*. Andra anger orsakssamband, t.ex. *eftersom* och *emedan*, eller motiv, t.ex. *för att*. Dessa konjunktioner handlar alltså om olika ”sakligt” grundade förhållanden, men det finns även konjunktioner som uttrycker rent logiska kopplingar, t.ex. *och*, *eller* och – i vissa fall – *om*. **Satslogiken** behandlar semantiken bakom dessa (men kan inte användas för att analysera de ”sakliga” konjunktionernas semantik).

3.2 Sant och falskt – sanningsvärden

Den satslogiska analysen noterar bara en aspekt hos satser, nämligen om de är falska eller sanna. De två möjligheterna fångas i begreppet **sanningsvärde**. Sant och falskt är de två sanningsvärdena. Vi skriver fortsättningsvis S och F för dessa. Satslogiken är en matematik som är baserad på enbart dessa två värden. Satserna är, ur satslogikens synvinkel, enbart bärare av sanningsvärden. *Alla andra drag hos satser ignoreras i satslogiken.* Satslogiken ensam kan inte hjälpa oss att göra särskilt många upplysande analyser av naturligt språk, men den utgör en oumbärlig komponent i alla de mer uttrycksfulla typer av logik som används i semantiken.

Detta sätt att se på sanning, att satser är sanna eller falska, innebär en idealisering och/eller förenkling. Vi kan givetvis även se sant och falskt i termer av gradskillnader, men detta synsätt brukar inte göra sig gällande i elementär logik.

3.3 Satssymboler

Eftersom vi bara beaktar satsers sanningsvärden i satslogiken, så kan det vara praktiskt att förkorta dem. Av den anledningen inför vi bokstäver som p och q för att representera godtyckliga satser. (Vi börjar med p eftersom en sats i logiken (och på engelska) ofta kallas en proposition.)

3.4 Negation (för att göra motsatsen till en utsaga)

Om vi har en sats kan vi negera den, t.ex. kan *Uppsala ligger vid västkusten* negeras till *Uppsala ligger* **inte** *vid västkusten*. Om vi utgår från en sann sats blir dess negation falsk och, vice versa, tar vi en falsk sats (som i exemplet) så blir dess negation sann. Detta är en grundprincip i logiken som stämmer bra med våra vardagliga intuitioner för de flesta satser.

Om vi inför ”¬” som symbol för negation (motsvarande *inte*), så kan vi sammanfatta negationens semantik som i denna tabell.

	godtycklig sats:	dess negation:
I symboler:	p	$\neg p$
Möjlighet (1):	S	F
Möjlighet (2):	F	S

3.5 Konnektiver, t.ex. konjunktion, disjunktion, materiell implikation

Konnektiver är sådana operatorer som binder samman två satser så att den sammansatta satsens sanningsvärde är bestämt av delsatsernas sanningsvärden. Vi skall ta upp tre av dessa: konjunktion (*och*) för fallet då två delsatser samtidigt måste vara sanna; disjunktion (*eller*) för fallet då minst endera av två delsatser måste vara sann; (*om* ..., *så*) för fallet då andra delsatsen måste vara sann i den händelse den första är sann.

3.6 Konjunktion i logisk bemärkelse (för att fånga två utsagor i en)

Konjunktionen *och* verkar (ofta) fungera så att den kopplar ihop två satser till en sats som är sann om och endast om de två delsatserna båda är sanna. (Om en delsats är falsk eller båda två är det, så blir den sammansatta satsen falsk.) Satsen *Karl XII var kung och Pompe var en hund* är sann, därför att satserna som *och* kopplar samman båda är sanna. Satsen *Karl XII var kung och Pompe var en katt* är således falsk. I satslogiken används bokstäver som förkortningar av satser, medan symbolen ”$\wedge$” motsvarar *och*. Om vi kallar *Karl XII var kung* för ”p” och *Pompe var en hund* för ”q”, så kan vi komprimera *Karl XII var kung och Pompe var en hund* till ”$p \wedge q$”. På detta sätt döljer vi alla detaljer som satslogiken ignorerar.

På grund av en olycklig terminologisk omständighet kallas den satslogiska operatorn ”$\wedge$” för **konjunktion**. Detta är ett logiskt begrepp och inte ett grammatiskt. Ordklassen ”konjunktion” är något helt annat. De allra flesta grammatiska konjunktioner (t.ex. *eller*) uttrycker *inte* logisk konjunktion. Ordet ”konjunktion” står alltså för två mycket olika begrepp. (Ordet *och* råkar dock vara en en konjunktion grammatiskt sett samtidigt som det uttrycker logisk konjunktion.)

Operationen ”konjunktion” definierar ett sanningsvärde – givet att dess två argument står för sanningsvärden – enligt denna tabell:

p	q	$p \wedge q$	**exempel**
S	S	S	*Monaco ligger vid Medelhavet (p)* **och** *Monaco är ett furstendöme (q).* *(p ∧ q komprimerat:) Monaco är ett furstendöme vid Medelhavet.*
S	F	F	*Monaco ligger vid Medelhavet (p)* **och** *Monaco är en stormakt (q).* *(p ∧ q komprimerat:) Monaco är en stormakt vid Medelhavet.*
F	S	F	*Monaco ligger vid Stilla oceanen (p)* **och** *Monaco är ett furstendöme (q).* *(p ∧ q komprimerat:) Monaco är ett furstendöme vid Stilla oceanen.*
F	F	F	*Monaco ligger vid Stilla oceanen (p)* **och** *Monaco är en stormakt (q).* *(p ∧ q komprimerat:) Monaco är en stormakt vid Stilla oceanen.*

Bokstäverna ”p” och ”q” står för satser och därmed för sanningsvärden. Det finns två möjligheter per sats, sann (förkortat ”S”) och falsk (förkortat ”F”). Det blir, som vi ser, totalt fyra möjligheter för två satser. För vart och ett av de fyra fallen specificerar tabellen sanningsvärdet hos ”$p \wedge q$”. *Denna tabell definierar fullständigt operationen ”$\wedge$”.*

3.7 Disjunktion (för att säga att minst endera av två utsagor är sann)

En annan viktig sanningsoperator är **disjunktion**. Den tecknas med symbolen ”$\vee$”. Disjunktionen av två satser är den sammansatta sats som är sann om *minst en* av operandsatserna är sanna. Den uttrycks på svenska som *eller* eller – om man vill vara särskilt tydlig – *och/eller*.

Denna tabell definierar fullständigt operationen ”$\vee$” och ger några konkreta exempel.

p	q	$p \vee q$	**exempel**
S	S	S	*Monaco ligger vid Medelhavet (p)* **eller** *Monaco gränsar till Frankrike (q).* *(p ∨ q komprimerat:) Monaco ligger vid vid Medelhavet eller gränsar till Frankrike.*
S	F	S	*Monaco ligger vid Medelhavet (p)* **eller** *Monaco gränsar till Spanien (q).* *(p ∨ q komprimerat:) Monaco ligger vid Medelhavet eller gränsar till Spanien.*
F	S	S	*Monaco ligger vid Stilla oceanen (p)* **eller** *Monaco gränsar till Frankrike (q).* *(p ∨ q komprimerat:) Monaco ligger vid Stilla oceanen eller gränsar till Frankrike.*
F	F	F	*Monaco ligger vid Stilla oceanen (p)* **eller** *Monaco gränsar till Spanien (q).* *(p ∨ q komprimerat:) Monaco ligger vid Stilla oceanen eller gränsar till Spanien .*

3.8 Materiell implikation (för att fånga villkorlighet)

Sanningsoperatorn **materiell implikation**, med symbolen ”$p \rightarrow q$”, är relaterad till villkorlighet. ”$p \rightarrow q$” (”p implicerar q”) är sann precis i de fall delsatsen q är sann givet att delsatsen p är sann. Om p är falsk är $p \rightarrow q$ sann. $p \rightarrow q$ är falsk enbart när p är sann och q är falsk. I motsats till konjunktion och disjunktion spelar delsatsernas ordning alltså roll.

En materiell implikation ”$p \rightarrow q$” kan även utläsas ”Om p, så q” (”q, om q”). Man bör dock notera att satser av typen ”om ..., så ...” generellt sett i svenskan ofta uttrycker mer substantiella samband. Materiell implikation handlar bara om sanningsvärden.

Exempel:

p	q	$p \to q$	**exempel**
S	S	S	**Om** *Göteborg ligger vid Göta älv (p),* **så** *är Göteborg en hamnstad (q).*
S	F	F	**Om** *Göteborg ligger vid Göta älv (p),* **så** *är Norrmalm en del av Göteborg (q).*
F	S	S	**Om** *Göteborg är Sveriges huvudstad (p),* **så** *är Norrmalm en del av Göteborg (q).*
F	F	S	**Om** *Göteborg är Sveriges huvudstad (p),* **så** *är Norrmalm en del av Göteborg (q).*

Materiell implikation blir mest intressant i kombination med en element av generalitet. Låt oss betrakta satsen *Om du är i Göteborg, så är du vid västkusten.* I detta sammanhang kan *du* tänkas representera en godtycklig person. Satsen kan därmed ses som en generell "geografisk" sanning.

Vi får fyra logiskt möjliga fall, varav tre är geografiskt möjliga. (p: *Du är i Göteborg*. q: *Du är vid västkusten*.)

p	q	$p \to q$	**exempelsituation**
S	S	S	*Du är i Göteborg och vid västkusten.*
S	F	F	*Du är i Göteborg, men inte vid västkusten.* (Geografiskt omöjligt.)
F	S	S	*Du är i Halmstad och vid västkusten.*
F	F	S	*Du är i Uppsala och inte vid västkusten.*

3.9 Konnektiver, översikt

	sats (1)	sats (2)	konjunktion	disjunktion	implikation
I symboler:	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
Möjlighet (1):	S	S	S	S	S
Möjlighet (2):	S	F	F	S	F
Möjlighet (3):	F	S	F	S	S
Möjlighet (4):	F	F	F	F	S

3.10 Konnektiver, alternativa uttryckssätt

Det räcker med negation och konjunktion för att uttrycka hela satslogiken. Exempelvis gäller:

"$p \vee q$" är samma som "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$"

"$p \to q$" är samma som "$\neg(p \wedge \neg q)$"

Sådana samband kan kontrolleras med hjälp av **sanningsvärdestabeller**, i vilka man går igenom alla tänkbara sanningsvärdestilldelningar till de enkla satserna. Varje uttryck har ett huvudtecken, den operator varmed uttrycket är sammansatt. Varje uttrycks sanningsvärde kan därför placeras under uttryckets huvudtecken.

Ovannämnda samband kan kollas med den s.k. tabellmetoden. ”$p \vee q$” är ekvivalent med ”$\neg(\neg p \wedge \neg q)$”:

p	$\vee$	q	$\neg($	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q))$
S	S	S	S	F	S	F	F	S
S	S	F	S	F	S	F	S	F
F	S	S	S	S	F	F	F	S
F	F	F	F	S	F	S	S	F

”$p \rightarrow q$” är samma som ”$\neg(p \wedge \neg q)$”:

p	$\rightarrow$	q	$\neg($	p	$\wedge$	$\neg$	$q))$
S	S	S	S	S	F	F	S
S	F	F	F	S	S	S	F
F	S	S	S	F	F	F	S
F	S	F	S	F	F	S	F

4 Predikatlogik (en mycket mer uttrycksfull logik)

Predikatlogiken, som innehåller allt som finns i satslogiken, är en mycket rikare typ av logik än satslogiken. Man kan uttrycka en väldigt stor del av det sakliga innehållet i satser på naturligt språk i predikatlogik, även om en hel del finurlighet kan krävas.

Predikatlogik är även basen för hantering av information i databaser.

4.1 Individkonstanter

Vi behöver också namn på objekt i logiken. Dessa namn kallas **individkonstanter**. (Exempel i nästa avsnitt.) Termen **individ** står i detta sammanhang bara för ett godtyckligt objekt. En individ kan alltså vara vad som helst.

Logiken i sig säger ingenting om vad som skall räknas som en individ. Det beror mer på vilken teori eller vilket språk man befattar sig med.

När man analyserar naturligt språk kan man tänka att individkonstanter skall motsvara namn. Namn är uttryck som står för bestämda objekt på ett förhållandevis stabilt sätt. Uttryck (ord) som *Uppsala*, *Uppsala universitet*, *Putin*, *Silverbibeln*, *Eiffeltornet*, och *Duman* är exempel på typiska namn. Pronomina syftar på saker på ett mer dynamiskt sätt, beroende på situationen, och räknas inte som namn. Exempel på pronomina *den*, *hon*, och *vi*. Artnamn (vanliga typen av substantiv) står för egenskaper eller typer av saker och fungerar inte heller som namn. Exempel på sådana: *person*, *stad*, *hund* och *bord*.

4.2 Predikat

Termen **predikat** täcker in egenskaper och relationer. Predikat prediceras om individer, och vi får utsagor som är sanna eller falska. Predikaten representeras av speciella symboler som vi bestämt skall ha denna funktion. De är indelade efter ställighet, som anger antalet argument.

4.3 Egenskaper = enställiga predikat

Egenskaper motsvarar predikat med ställigheten ett. De är sanna om individer som har egenskapen ifråga och falska annars.

Om vi tänker oss att individkonstanterna s och r står för Mona Sahlin respektive Fredrik Rheinfeldt och predikatet M för egenskapen att vara moderat, så blir satsen $M(s)$ (*Mona Sahlin är moderat*) falsk och $M(r)$ (*Fredrik Rheinfeldt är moderat*) sann.

Vi kan kombinera dessa med hjälp av konnektiver:

$M(s) \wedge M(r)$: *Både Mona Sahlin och Fredrik Rheinfeldt är moderater* (falskt)

$M(s) \vee M(r)$: *Mona Sahlin eller Fredrik Rheinfeldt är moderat* (sant)

Fråga (2): Gå igenom samtliga ordklasser och försök hitta några bra exempel på ord som står för enställiga predikat i var och en av dessa. Inom vilka ordklasser verkar enställiga predikat hamna?

4.4 Tvåställiga predikat, en typ av relationer

Vi kan också tänka oss predikat som prediceras om två individer i taget. På så sätt kan vi fånga relationer. En sats som $G(p,l)$ kan då motsvara *Pelle gillar Lisa* om G svarar mot relationen *gillar*. Vi kan negera: $\neg G(p,l)$ kan då motsvara *Lisa gillar inte Pelle*. Vi kan skapa konjunktionen $G(p,l) \wedge \neg G(l,p)$ som på svenska kanske blir *Pelle gillar Lisa, men Lisa gillar inte Pelle* (Ordet *men* svarar mot logisk konjunktion, men antyder – till skillnad mot *och* – att en kontrast föreligger.)

Fler exempel:

Uppsala ligger i Uppland.

$I(u_1,u_2)$

Pelle och Lisa gillar varandra.
(*Pelle gillar Lisa och Lisa gillar Pelle.*)

$G(p,l) \wedge G(l,p)$

Pelle och Lisa gillar inte varandra.
(*Pelle gillar inte Lisa och Lisa gillar inte Pelle.*)

$(\neg G(p,l)) \wedge \neg G(l,p)$

Gustav Vasa och Johan III är begravda i Uppsala.

$B(g,u_1) \wedge B(j,u_1)$

Gustav Vasa och hans son Johan III är begravda i Uppsala.

$B(g,u_1) \wedge S(j,g) \wedge B(j,u_1)$

Gustav Vasa är begravd i Uppsala eller i Riddarholmskyrkan.

$B(g,u_1) \vee B(g,r)$

Fråga (3): Gå igenom samtliga ordklasser och försök hitta några bra exempel på ord som står för tvåställiga predikat i var och en av dessa. Inom vilka ordklasser verkar tvåställiga predikat hamna?

4.5 Inskott: viktiga begrepp så här långt (lite repetition)

Vi skall nu bygga vidare på de byggstenar i logiken som vi tidigare infört. Det nya här är variabler (som vi skriver x, y, z) och kvantifikatorer, **existenskvantifikatorn** – vars symbol är ”$\exists$” – och **allkvantifikatorn** (”$\forall$”). Vi kan säga att vi har fyra typer av konstruktionselement så här långt:

(1) Negation:

	godtycklig sats:	dess negation:
I symboler:	p	$\neg p$
Möjlighet (1):	S	F
Möjlighet (2):	F	S

(2) Konnektiver:

	sats (1)	sats (2)	konjunktion	disjunktion	implikation
I symboler:	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
Möjlighet (1):	S	S	S	S	S
Möjlighet (2):	S	F	F	S	F
Möjlighet (3):	F	S	F	S	S
Möjlighet (4):	F	F	F	F	S

(3) Individkonstanter är namn på objekt i logiken. Vi skriver med med gemener.

(4) Predikat prediceras om individer, och vi får utsagor som är sanna eller falska. Vi skriver dem med versaler. Syntaktiskt sett kan predikat appliceras på individkonstanter. Dessa är då argument till predikatet.

Enkelt exempel i detalj:

Svenska: *Fredrik Rheinfeldt är moderat*

Predikatlogik: $M(r)$.

Individkonstant: r. Avsikt: r står för Fredrik Rheinfeldt.

Predikat: M. Avsikt: M står för (egenskapen att vara) moderat.

Syntax: i $M(r)$ är r argumentet till M.

4.6 Generalitet

En viktig sak i språk och tänkande är att kunna fånga generella samband. All tillämpning av kunskap måste ju börja med att man känner igen en ny sak som ett exempel på någon tidigare känd mer abstrakt typ. När man stöter på en tomat i affären, som man kanske väljer att köpa, så känner man igen objektet ifråga som just en tomat. (En ovanlig typ av tomat skulle man kanske inte känna igen.) Kanske vet man sedan tidigare att tomater generellt sett är välsmakande och nyttiga, och man drar slutsatsen att just denna tomat är nyttig och välsmakande. Generalitet är på detta sätt en aspekt av all kunskap som man kan använda för att orientera sig i nya situationer.

Låt oss än en gång betrakta satsen *Om du är i Göteborg, så är du vid västkusten.* I detta sammanhang kan *du* tänkas representera en godtycklig person. Satsen kan därmed, som sagt, ses som en generell ”geografisk” sanning.

Vi skulle också kunna uttrycka oss på sätt som dessa:

Om man är i Göteborg, så är man vid västkusten.

Om en godtycklig individ är i Göteborg, så är den vid västkusten.

Vi kan också använda variabler, t.ex. x, som i matematisk notation: Dessa variabler står för individer, men det är öppet vilka. De kan stå på samma platser som individkonstanter, alltså som argument till predikat.

Om x är i Göteborg, så är x vid västkusten.

Om vi vill vara extra tydliga med att detta gäller generellt skulle vi kunna skriva:

Det gäller generellt, för alla x, att om x är i Göteborg, så är x vid västkusten.

Om vi nu inför individkonstanterna g och v för Göteborg, respektive västkusten, samt predikatet B för att befinna sig i eller vid en plats, så får vi (på ett blandspråk):

Det gäller generellt, för alla x, $(B(x,g) \rightarrow B(x,v))$

Nu kan vi tänka oss att denna generalitet omfattar fyra logiskt möjliga fall, varav en utesluts av exempelsatsen. (Satsen är sann och det handlar om uteslutandet av en ”geografisk omöjlighet”):

$B(x,g)$	$B(x,v)$	$(B(x,g) \rightarrow B(x,v))$	**exempelsituation**
S	S	S	*x är i Göteborg och vid västkusten.* (Tänkbart.)
S	F	F	*x är i Göteborg, men inte vid västkusten.* (Uteslutet.)
F	S	S	*x är i Halmstad och vid västkusten.* (Tänkbart.)
F	F	S	*x är i Uppsala och inte vid västkusten.* (Tänkbart.)

Fråga (4): Analysera på detta sätt följande satser:

(a) *Alla röda tomater är mogna.*

(b) *Grönsaker är goda och nyttiga.*

Satsen *Det gäller generellt, för alla x,* $(B(x,g) \rightarrow B(x,v))$ vill vi kanske komprimera lite mer. Det här med generalitet är ju så viktigt att det kan vara lämpligt med en särskild symbol för det. Vi har för det ändamålet **allkvantifikatorn** (”$\forall$”).

$$\forall x(B(x,g) \rightarrow B(x,v))$$

Låt oss ta ett annat exempel (på en rimligtvis falsk sats):

Om man är i Göteborg, så är man på Kungsportsavenyn (k).

(*Alla som är i Göteborg är på Kungsportsavenyn (k).*)

$\forall x(B(x,g) \rightarrow B(x,k))$

Men det är inte sant, så om vi negerar får vi en sann sats:

Det är inte (generellt sett) så att om man är i Göteborg, så är man på Kungsportsavenyn.

(*Alla som är i Göteborg är inte på Kungsportsavenyn.*)

$\neg\forall x(B(x,g) \to B(x,k))$

$\forall x(B(x,g) \to B(x,k))$ är falsk eftersom, säg en godtycklig person som befinner sig på Backaplan som värde på x skulle göra implikationen $(B(x,g) \to B(x,k))$ falsk, och därmed $\forall x(B(x,g) \to B(x,k))$.

Fler exempel (rimligtvis sanna eller nästan sanna utsagor):

Inte alla tomater (T) är röda (R).
$\neg\forall x(T(x) \to R(x))$

Inga tomater (T) är lila (L).
(*d.v.s. Alla tomater är icke-lila.*)
$\forall x(T(x) \to \neg L(x))$

Inga gröna paprikor är mogna.
$\forall x[(G(x) \land P(x)) \to \neg M(x)]$

Inte alla paprikor är gröna.
$\neg\forall x[P(x) \to G(x)]$

Alla paprikor är gröna eller röda.
$\forall x[P(x) \to (G(x) \lor R(x))]$

Alla paprikor som är gula eller röda är mogna.
$\forall x[(P(x) \land (G(x) \lor R(x))) \to M(x)]$

Ingen som är i Göteborg befinner sig på Sergels torg (s).
$\forall x(B(x,g) \to \neg B(x,s))$

Ingen befinner sig (samtidigt) i Göteborg och på Sergels torg.
$\forall x\neg(B(x,g) \land B(x,s))$

Inte alla befinner sig i Göteborg eller på Sergels torg.
$\neg\forall x(B(x,g) \lor B(x,s))$

4.7 ”Multipel” generalitet

Vi kan kombinera två eller fler komponenter av generalitet i en utsaga, t.ex. uttala oss generellt om apelsiner och citroner:

Citroner (C) är surare än (S) apelsiner (A).
(*Vi kan förstå det som: Varje citron är surare än varje apelsin.*)
$\forall x\forall y((C(x) \land A(y)) \to S(x,y))$

4.8 Existentiella satser

Vi har hittills enbart sett på det fallet då variabler kopplats till generalitet, alltså till ”$\forall$”. Men det går även att knyta en variabel till kravet att det skall finnas minst ett objekt som kopplat till variabeln gör den aktuella formeln sann. Motsvarande symbol är ”$\exists$”. ”$\forall$” och ”$\exists$” kallas kvantifikatorer och fungerar syntaktiskt sett på samma sätt. De ”binder” variabler.

Det finns tomater (T) som är röda (R).
(*Mer strikt: Minst en sak är en tomat och röd. Eller: Minst en sak är en röd tomat.)*)

$$\exists x(T(x) \wedge R(x))$$

Det finns tomater (T) som inte är röda (R).
(*Mer strikt: Minst en sak är en tomat och inte röd*)

$$\exists x(T(x) \wedge \neg R(x))$$

Det finns inte lila tomater.
(*Ingen sak är en tomat och (samtidigt) lila.*)

$$\neg\exists x(T(x) \wedge L(x))$$

Denna sista sats är synonym med denna (som vi hade ovan):

Inga tomater T är lila (L).
(*d.v.s. Alla tomater är icke-lila.*)

$$\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$$

Mer om denna synonymi nedan.

4.9 Sambandet mellan existentiella och generella satser

Sammanfattningsvis är det så att om vi har en formel med en variabel i, så kan vi sätta samman den med en operator som **binder** variabeln. I predikatlogiken brukar man använda två sådana operatorer, **existenskvantifikatorn** – vars symbol är ”$\exists$” – och **allkvantifikatorn** (”$\forall$”). Dessa kombineras med en variabel – den variabel som binds – och kopplas samman med en formel. De kan förstås på följande sätt (**x** kan vara vilken variabel som helst:

”$\exists\mathbf{x}\ldots$” – det gäller för något **x** att … *eller* det finns minst ett objekt som kan kopplas till **x** så att … blir sann. (Variabeln **x** binds av ”$\exists$”.)

”$\forall\mathbf{x}\ldots$” – det gäller för alla **x** att … *eller* oavsett vilket objekt som kopplas till **x** så blir … sann. (Variabeln **x** binds av ”$\forall$”.)

Egentligen behövs bara en av de båda kvantifikatorerna, eftersom den ena kan definieras med hjälp av den andra och negation. Att alla objekt uppfyller ett visst villkor innebär att det *inte finns någonting* som *inte uppfyller* villkoret ifråga. Och att minst ett objekt uppfyller ett villkor innebär att *inte alla objekt icke-uppfyller* villkoret. I predikatlogikens notation kan vi uttrycka detta sålunda:

”$\exists\mathbf{x}[F(\mathbf{x})]$” betyder ”$\neg\forall\mathbf{x}[\neg F(\mathbf{x})]$”.

”$\forall\mathbf{x}[F(\mathbf{x})]$” betyder ”$\neg\exists\mathbf{x}[\neg F(\mathbf{x})]$”.

"$F(\mathbf{x})$" står här för vilket villkor som helst, d.v.s. en godtycklig formel som innehåller variabeln $\mathbf{x}$.

Konsekvensen av dessa samband är att man kan betrakta *en* kvantifikator som grundläggande, men det är praktiskt att ha båda för att slippa skriva ut de negationer som skulle behövas om man bara hade den ena.

Med hjälp av dessa samband och några ur satslogiken kan man visa varför föjande synonymi råder:

Inga tomater (T) är lila (L).
(*d.v.s. Alla tomater är icke-lila.*)

$$\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$$

Det finns inte lila tomater.
(*Ingen sak är en tomat och (samtidigt) lila.*)

$$\neg\exists x(T(x) \wedge L(x))$$

Vi har: $\forall x(T(x) \rightarrow \neg L(x))$ (1)

Vi har tidigare sett: "$p \rightarrow q$" är samma som "$\neg(p \wedge \neg q)$" (2)

Alltså, ur (1) och (2): $\forall x \neg(T(x) \wedge \neg\neg L(x))$ (3)

Alltså, ur (3), då dubbla negationer tar ut varandra: $\forall x \neg(T(x) \wedge L(x))$ (4)

Om vi tillämpar ekvivalensen mellan "$\forall \mathbf{x}[F(\mathbf{x})]$" och "$\neg\exists \mathbf{x}[\neg F(\mathbf{x})]$" på (4), så får vi:

$\neg\exists x \neg\neg(T(x) \wedge L(x))$ (5)

Alltså, ur (5), då dubbla negationer tar ut varandra: $\neg\exists x(T(x) \wedge L(x))$

Fråga (5): Analysera dessa meningar på samma sätt som de två första:

Pelle gillar alla hundar.	$\forall x[H(x) \rightarrow G(p,x)]$
Någon gillar Pelle.	$\exists x[G(x,p)]$
Det finns paprikor som varken är gula eller röda.	
Pelle gillar inte någon.	
Ingen gillar Pelle.	
Det finns en hund som Pelle gillar.	
Det finns en hund som Pelle inte gillar.	
Alla hundar gillar Pelle.	
Inga hundar gillar Pelle.	
Endast hundar gillar Pelle.	

4.10 Exempel med multipel kvantifikation

I många utsagor kombineras fler än två kvantifikationer. Dessa kan analyseras med hjälp av predikatlogik:

Ingen gillar alla hundar.

$$\neg\exists x[\forall y[H(y) \rightarrow G(x,y)]]$$

Det finns en katt som inte gillar någon hund.

$$\exists x[K(x) \wedge \neg\exists y[H(y) \wedge G(x,y)]]$$

Alla människor har en fader och en moder.

$$\forall x[M_1(x) \rightarrow \exists y[\exists z[F(y,x) \wedge M_2(z,x)]]]$$

Alla katter gillar alla hundar.

$$\forall x[\forall y[(K(x) \wedge H(y)) \rightarrow G(x,y)]]$$

Fråga (6): Analysera dessa meningar på samma sätt som ovan:

Alla katter gillar sig själva.

Det finns en katt som alla hundar gillar.

Det finns en katt som gillar alla hundar.

Pelle ser en hund och en katt.

Ingen människa har sett en enhörning.

4.11 En definition och dess logiska struktur

Begreppet *helbror* har ett förhållandevis precist innehåll. Vi skulle kunna definiera det på följande sätt:

Det gäller för alla X och Y – d.v.s. oavsett vilka objekt vi låter X och Y representera – att

[definiendum]	X är helbror till Y
	om och endast om
[definiens]	X och Y är två olika personer *och*
	X är man *och*
	det finns två objekt F_1 *och* F_2
	som är sådana att
	F_1 är förälder till X *och*
	F_2 är förälder till X *och*
	F_1 är förälder till Y *och*
	F_2 är förälder till Y.

Uttrycket *om och endast om* uttrycker nödvändiga (*endast om*) och tillräckliga (*om*) villkor. Det svarar mot ett konnektiv som är sant då delsatserna har samma sanningsvärde, alltså är två sanna eller två falska satser. Detta konnektiv brukar heta ekvivalens, och uttrycks med symbolen '$\leftrightarrow$'. $p \leftrightarrow q$ innebär alltså att p och q har samma sanningsvärde. Låt oss jämföra det med våra tidigare konnektiver:

	sats (1)	sats (2)	konjunktion	disjunktion	implikation	ekvivalens
I symboler:	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Möjlighet (1):	S	S	S	S	S	S
Möjlighet (2):	S	F	F	S	F	F
Möjlighet (3):	F	S	F	S	S	F
Möjlighet (4):	F	F	F	F	S	S

'$p \leftrightarrow q$' säger samma sak som '$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$', vilket förklarar symbolens utseende (ömsesidig implikation, s.a.s.).

p	$\leftrightarrow$	q	$((p \rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p))$
S	S	S	S	S	S
S	F	F	F	F	S
F	F	S	S	F	F
F	S	F	S	S	S

Predikatlogiken tillåter oss också att formalisera en sådan definition. Vi får då en formel av detta slag. Den är uppställd så att strukturen framgår tydligt.

$$
\begin{array}{llll}
\forall x \forall y & (& B(x,y) \leftrightarrow & \\
 & & (\neg(x=y) \wedge & \\
 & & M(x) \wedge & \\
 & & \exists z_1 \exists z_2 & (z_1 \neq z_2 \wedge \\
 & & & F(z_1,x) \wedge \\
 & & & F(z_2,x) \wedge \\
 & & & F(z_1,y) \wedge \\
 & & & F(z_2,y))))
\end{array}
$$